$(a)\ \displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}\ \mathrm{d}x \qquad (b)\ \int \frac{\sinh x}{\cosh x+1}\ \mathrm{d}x \qquad (c)\ \int \frac{x+\sqrt{x-1}}{x-5}\ \mathrm{d}x$

$(d)\ \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x}(\sqrt[3]{2x}+1)}\ \mathrm{d}x \qquad (e)\ \int \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x \qquad (f)\ \int \sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}x \qquad (g)\ \int \sqrt{x^2-1}\ \mathrm{d}x$

$(h)\ \displaystyle\int \frac{2}{(1+\tan x)^2}\ \mathrm{d}x \qquad (i)\ \int \frac{\cos x-3}{\sin^2 x-\cos^3 x+1}\sin x\ dx \qquad (j)\ \int \frac{1}{4\sin x+3\cos x}\ \mathrm{d}x\ .$

(a) L'integrale

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}\ \mathrm{d}x$$

può essere trasformato nell'integrale di una funzione razionale effettuando la sostituzione $e^x=t$, da cui $x=\log t$ e $\mathrm{d}x\ =\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$.

Pertanto

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}\ \mathrm{d}x\ =\int \frac{t}{t^2-3t+2}\,\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t\ =\int \frac{1}{t^2-3t+2}\ \mathrm{d}t\ =\int \frac{1}{(t-1)(t-2)}\ \mathrm{d}t\ .$$

Si tratta dell'integrale di una funzione razionale il cui denominatore è decomposto in fattori irriducibili. Usiamo il metodo di decomposizione in fratti semplici:

$$\frac{1}{(t-2)(t-1)}=\frac{A}{t-2}+\frac{B}{t-1}=\frac{A(t-1)+B(t-2)}{(t-1)(t-2)}=\frac{(A+B)t-A-2B}{(t-1)(t-2)}.$$

Uguagliando i coefficienti dei polinomi a numeratore, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} A+B &= 0\\ -A-2B &= 1\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A &= 1\\ B &= -1\end{cases}\ .$$

Pertanto

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}\ \mathrm{d}x\ =\int \left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t-1}\right)\ \mathrm{d}t\ =\log|t-2|-\log|t-1|+c=\log|e^x-2|-\log|e^x-1|+c.$$

(b) $\displaystyle\int \frac{\sinh x}{\cosh x+1}\ \mathrm{d}x\ =\int \frac{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}+1}\ \mathrm{d}x\ =\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}+2}\ \mathrm{d}x\ .$

Effettuando, come sopra, la sostituzione $e^x=t$, da cui $x=\log t$ e $\mathrm{d}x\ =\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$, si ottiene

$$\int \frac{\sinh x}{\cosh x+1}\ \mathrm{d}x\ =\int \frac{t-\frac{1}{t}}{t+\frac{1}{t}+2}\,\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t\ =\int \frac{t^2-1}{t^2+1+2t}\,\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t\ =\int \frac{(t-1)(t+1)}{(t+1)^2}\,\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t\ =\int \frac{t-1}{t(t+1)}\ \mathrm{d}t\ .$$

Con il metodo di decomposizione in fratti semplici si ottiene:

$$\frac{t-1}{t(t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}=\frac{A(t+1)+Bt}{t(t+1)}=\frac{(A+B)t+A}{t(t+1)}.$$

Uguagliando i coefficienti dei polinomi a numeratore, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} A+B=1\\ A=-1\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=-1\\ B=2\end{cases}\ .$$

Dunque:

$$\int \frac{\sinh x}{\cosh x+1}\ \mathrm{d}x\ =\int \left(\frac{-1}{t}+\frac{2}{t+1}\right)\ \mathrm{d}t\ =-\log|t|+2\log|t+1|+c=-\log|e^x|+2\log|e^x+1|+c=$$
$$=\log(e^x+1)^2-x+c.$$

(c) L'integrale $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{x-5}\ \mathrm{d}x$, può essere ricondotto ad un integrale di funzione razionale operando la sostituzione $\sqrt{x-1}=t$, da cui $x=1+t^2$ e $\mathrm{d}x\ =2t\ \mathrm{d}t$.

Pertanto

$$\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{x-5}\ \mathrm{d}x\ =\int \frac{t^2+t+1}{t^2-4}\cdot 2t\ \ \mathrm{d}t\ =2\int \frac{t^3+t^2+t}{t^2-4}\ \mathrm{d}t\ .$$

Eseguendo la divisione tra polinomi si ottiene $\dfrac{t^3+t^2+t}{t^2-4}=t+1+\dfrac{5t+4}{t^2-4}$.

Dunque:

$$\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{x-5}\ \mathrm{d}x\ =2\int \left(t+1+\frac{5t+4}{(t-2)(t+2)}\right)\ \mathrm{d}t\ .$$

Decomponendo l'ultima frazione in fratti semplici, si ha:

$$\frac{5t+4}{(t-2)(t+2)}=\frac{A}{t-2}+\frac{B}{t+2}=\frac{A(t+2)+B(t-2)}{t^2-4}=\frac{(A+B)t+(2A-2B)}{t^2-4}.$$

Uguagliando i numeratori della prima e dell'ultima frazione si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} A+B &= 5 \\ 2A-2B &= 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A &= \frac{7}{2} \\ B &= \frac{3}{2} \end{cases}$$

Dunque :

$$\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{x-5}\ \mathrm{d}x\ =2\int (t+1)\ \mathrm{d}t\ +2\int \left(\frac{7}{2}\frac{1}{t-2}+\frac{3}{2}\frac{1}{t+2}\right)\ \mathrm{d}t\ =t^2+2t+7\log|t-2|+3\log|t+2|+c=$$
$$=x-1+2\sqrt{x-1}+7\log|\sqrt{x-1}-2|+3\log|\sqrt{x-1}+2|+c.$$

(d) Per risolvere l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x}(\sqrt[3]{2x}+1)}\ \mathrm{d}x$, allo scopo di "eliminare i radicali " si può effettuare la sostituzione $2x=t^6$, da cui $\mathrm{d}x\ =3t^5\ \mathrm{d}t$; in tal modo si ha $\sqrt{2x}=t^3$ e $\sqrt[3]{2x}=t^2$.
Dunque:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x}(\sqrt[3]{2x}+1)}\ \mathrm{d}x\ =\int \frac{3t^5}{t^3(t^2+1)}\ \mathrm{d}t\ =3\int \frac{t^2}{t^2+1}\ \mathrm{d}t\ =3\int \left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\ \mathrm{d}t\ =3t-3\arctan t+c=$$
$$=3\sqrt[6]{2x}-3\arctan \sqrt[6]{2x}+c.$$

(e) L'integrale $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x$ è già stato risolto precedentemente per parti; si può anche effettuare la sostituzione $x=\sin t$, da cui e $\mathrm{d}x\ =\cos t\ \mathrm{d}t$.
La funzione $x=\sin t$ non è iniettiva; pertanto, per poter effettuare la sostituzione inversa, dobbiamo restringerci a un opportuno intervallo di integrazione; conviene scegliere l'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, in cui oltre a invertire la funzione $x=\sin t$, trovando $t=\arcsin x$, è anche possibile ricavare $\sqrt{1-x^2}=\cos t$. Dunque

$$\int \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x\ =\int \cos^2 t\ \mathrm{d}t\ =\int \frac{1+\cos(2t)}{2}\ \mathrm{d}t\ =\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin(2t)+c=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\sin t\cos t+c=$$
$$=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+c.$$

(f) Per risolvere l'integrale $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}x$ conviene effettuare la sostituzione $x=\sinh t$, da cui si ricava $\mathrm{d}x\ =\cosh t\ \mathrm{d}t$; si ha inoltre $\sqrt{1+x^2}=\cosh t$, tenendo conto che i due membri dell'ultima uguaglianza sono funzioni sempre positive. Dunque

$$\int \sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}x\ =\int \cosh^2 t\ \mathrm{d}t\ =\int \frac{(e^t+e^{-t})^2}{4}\ \mathrm{d}t\ =\int \frac{e^{2t}+e^{-2t}+2}{4}\ \mathrm{d}t\ =\frac{1}{4}\left(\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}+2t\right)+c=$$
$$=\frac{1}{4}\sinh(2t)+\frac{1}{2}t+c=\frac{1}{2}\sinh t\cosh t+\frac{1}{2}t+c=\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\mathrm{settsinh}x+c.$$

(g) Per risolvere l'integrale $\int \sqrt{x^2-1}\ \mathrm{d}x$ conviene effettuare la sostituzione $x = \cosh t$, da cui si ricava $\mathrm{d}x = \sinh t\ \mathrm{d}t$.

Ponendoci su un opportuno intervallo di integrazione, possiamo invertire la funzione $x = \cosh t$; conviene scegliere l'intervallo $[0, +\infty)$, in cui si trova $t = \log(x + \sqrt{x^2-1})$. Inoltre è anche possibile ricavare $\sqrt{x^2-1} = \sinh t$. Dunque

$$\int \sqrt{x^2-1}\ \mathrm{d}x = \int \sinh^2 t\ \mathrm{d}t = \int (\cosh^2 t - 1)\ \mathrm{d}t = \int \cosh^2 t\ \mathrm{d}t - t.$$

Sfruttando il risultato appena trovato sopra $\int \cosh^2 t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \sinh t \cosh t + \frac{1}{2} t + c$, si ha:

$$\int \sqrt{x^2-1}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2} \log(x + \sqrt{x^2-1}) + c.$$

(h) Per calcolare $\int \frac{2}{(1+\tan x)^2}\ \mathrm{d}x$, allo scopo di trasformarlo in un integrale di funzione razionale possiamo usare la sostituzione $\tan x = t$, da cui $x = \arctan t$ e $\mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$.

Quindi:

$$\int \frac{2}{(1+\tan x)^2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{2}{(1+t)^2} \frac{1}{1+t^2}\ \mathrm{d}t .$$

Ricorriamo alla decomposizione in fratti semplici.

$$\frac{2}{(1+t)^2(1+t^2)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{(1+t)^2} + \frac{Ct+D}{1+t^2}.$$

Procedendo come sopra, si ottiene

$$\begin{cases} A &= 1 \\ B &= 1 \\ C &= -1 \\ D &= 0 \end{cases} .$$

Dunque:

$$\int \frac{2}{(1+\tan x)^2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+t}\ \mathrm{d}t + \int \frac{1}{(1+t)^2}\ \mathrm{d}t - \int \frac{t}{1+t^2}\ \mathrm{d}t = \log|1+t| - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{2}\log(1+t^2) + c =$$

$$= \log|1+\tan x| - \frac{1}{1+\tan x} - \frac{1}{2}\log(1+\tan^2 x) + c.$$

(i) Per risolvere l'integrale

$$\int \frac{\cos x - 3}{\sin^2 x - \cos^3 x + 1} \sin x \ \mathrm{d}x$$

è consigliabile usare la sostituzione $\cos x = t$, da cui $\sin x \ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t$. Pertanto

$$\int \frac{\cos x - 3}{\sin^2 x - \cos^3 x + 1} \sin x \ \mathrm{d}x = \int \frac{t-3}{1-t^2-t^3+1} \ \mathrm{d}t = \int \frac{3-t}{t^3+t^2-2} \ \mathrm{d}t \ .$$

Il polinomio a denominatore ammette la radice $t = 1$ e si fattorizza in $t^3 + t^2 - 2 = (t-1)(t^2+2t+2)$. Ricorrendo alla decomposizione in fratti semplci, si trova

$$\frac{3-t}{(t-1)(t^2+2t+2)} = \frac{\frac{2}{5}}{t-1} + \frac{-\frac{2}{5}t - \frac{11}{5}}{t^2+2t+2}.$$

Dunque

$$\int \frac{3-t}{t^3+t^2-2} \ \mathrm{d}t = \frac{1}{5} \int \left(\frac{2}{t-1} - \frac{2t+11}{t^2+2t+2} \right) \ \mathrm{d}t = \frac{1}{5} \left(2 \log|t-1| - \int \frac{2t+2}{t^2+2t+2} \ \mathrm{d}t \ - \int \frac{9}{1+(t+1)^2} \right) \ \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{2}{5} \log|t-1| - \frac{1}{5} \log(t^2+2t+2) - \frac{9}{5} \arctan(t+1) + c.$$

Infine

$$\int \frac{\cos x - 3}{\sin^2 x - \cos^3 x + 1} \sin x \ \mathrm{d}x = \frac{2}{5} \log|\cos x - 1| - \frac{1}{5} \log(\cos^2 x + 2\cos x + 2) - \frac{9}{5} \arctan(\cos x + 1) + c.$$

(j) L'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{4\sin x + 3\cos x} \ \mathrm{d}x$, può essere ricondotto ad un integrale di funzione razionale mediante le formule di razionalizzazione delle funzioni trigonometriche, cioè operando la sostituzione $\tan \frac{x}{2} = t$, da cui $x = 2\arctan t$ e $\mathrm{d}x = \dfrac{2}{1+t^2} \ \mathrm{d}t$; si ha inoltre $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Pertanto

$$\int \frac{1}{4\sin x + 3\cos x} \ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} \ \mathrm{d}t = \int \frac{2}{8t+3-3t^2} \ \mathrm{d}t = -2 \int \frac{1}{(3t+1)(t-3)} \ \mathrm{d}t \ .$$

Decomponendo l'ultima frazione in fratti semplici, si ha:

$$\frac{1}{(3t+1)(t-3)} = \frac{A}{3t+1} + \frac{B}{t-3} = \frac{A(t-3)+B(3t+1)}{(3t+1)(t-3)} = \frac{(A+3B)t + (-3A+B)}{(3t+1)(t-3)}.$$

Uguagliando i numeratori della prima e dell'ultima frazione, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} A + 3B &= 0 \\ -3A + B &= 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A &= -\frac{3}{10} \\ B &= \frac{1}{10} \end{cases} .$$

Dunque

$$\int \frac{1}{4\sin x + 3\cos x} \ \mathrm{d}x = -2 \int \left(-\frac{3}{10} \frac{1}{3t+1} + \frac{1}{10} \frac{1}{t-3} \right) \ \mathrm{d}t = \frac{1}{5} \log|3t+1| - \frac{1}{5} \log|t-3| + c =$$

$$= \frac{1}{5} \log \left| \frac{3\tan\frac{x}{2} + 1}{\tan\frac{x}{2} - 3} \right| + c.$$