$$(a)\ \int \frac{2x^2-3x+7}{x-5}\ \mathrm{d}x \qquad (b)\ \int \frac{3x-4}{x^2-6x+8}\ \mathrm{d}x \qquad (c)\ \int \frac{3x}{x^3-1}\ \mathrm{d}x$$

$$(d)\ \int \frac{9x+8}{x^3+2x^2+x+2}\ \mathrm{d}x \qquad (e)\ \int \frac{x^5-3x^4+x+3}{x^2-1}\ \mathrm{d}x \qquad (f)\ \int \frac{x^5-x+1}{x^4+x^2}\ \mathrm{d}x\ .$$

Soluzioni

(a) Per risolvere gli integrali di funzioni razionali, occorre anzitutto che il grado del numeratore sia strettamente inferiore al grado del denominatore. Se non lo è, bisogna procedere con la divisione dei polinomi.

Procediamo dunque alla divisione del polinomio a numeratore per il polinomio a denominatore e troviamo $\dfrac{2x^2-3x+7}{x-5} = 2x+7+\dfrac{42}{x-5}$.

Dunque

$$\int \frac{2x^2-3x+7}{x-5}\ \mathrm{d}x = \int \left(2x+7+\frac{42}{x-5}\right)\ \mathrm{d}x = \int (2x+7)\ \mathrm{d}x + \int \frac{42}{x-5}\ \mathrm{d}x = x^2+7x+42\log|x-5|+c.$$

(b) $\displaystyle\int \frac{3x-4}{x^2-6x+8}\ \mathrm{d}x = \int \frac{3x-4}{(x-4)(x-2)}\ \mathrm{d}x\ .$

Con il metodo di decomposizione in fratti semplici si ottiene:

$$\frac{3x-4}{(x-4)(x-2)} = \frac{A}{x-4}+\frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-4)}{(x-4)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A-4B}{(x-4)(x-2)}.$$

Uguagliando i coefficienti dei polinomi a numeratore, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} A+B=3 \\ -2A-4B=-4 \end{cases} \iff \begin{cases} A=4 \\ B=-1 \end{cases}.$$

Uguagliando i polinomi a numeratore della prima e dell'ultima frazione, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} A+B &= 0 \\ 2B+C &= 9 \\ A+2C &= 8 \end{cases} \implies \begin{cases} A &= -2 \\ B &= 2 \\ C &= 5 \end{cases}.$$

Pertanto:

$$\int \frac{9x+8}{x^3+2x^2+x+2}\ \mathrm{d}x = \int \left(\frac{-2}{x+2}+\frac{2x+5}{x^2+1}\right)\ \mathrm{d}x = \int \frac{-2}{x+2}\ \mathrm{d}x + \int \frac{2x}{x^2+1}\ \mathrm{d}x + \int \frac{5}{x^2+1}\ \mathrm{d}x =$$

$$= -2\log|x+2| + \log(x^2+1) + 5\arctan x + c = \log\frac{x^2+1}{(x+2)^2} + 5\arctan x + c.$$

Quindi:

$$\frac{3x-4}{(x-4)(x-2)} = \frac{4}{x-4} - \frac{1}{x-2}.$$

Dunque:

$$\int \frac{3x-4}{x^2-6x+8}\ \mathrm{d}x = \int \left[\frac{4}{x-4}-\frac{1}{x-2}\right]\ \mathrm{d}x = 4\log|x-4| - \log|x-2| + c.$$

(c) Per calcolare

$$\int \frac{3x}{x^3-1}\ \mathrm{d}x$$

possiamo usare direttamente il metodo di decomposizione in fratti semplici, in quanto il grado del numeratore è strettamente inferiore al grado del denominatore; dobbiamo scomporre il denominatore come prodotto di fattori irriducibili. Ricordando che $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ e usando il metodo di decomposizione in fratti semplici, possiamo scomporre la frazione da integrare:

$$\frac{3x}{x^3-1}=\frac{3x}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}=\frac{(A+B)x^2+(A-B+C)x+A-C}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

Uguagliando i numeratori della frazione iniziale e finale, si trova il sistema:

$$\begin{cases} A+B &= 0 \\ A-B+C &= 3 \\ A-C &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A &= 1 \\ B &= -1 \\ C &= 1 \end{cases}.$$

Quindi:

$$\int \frac{3x}{x^3-1}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-1}\ \mathrm{d}x - \int \frac{x-1}{x^2+x+1}\ \mathrm{d}x = \log|x-1| - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\ \mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\ \mathrm{d}x =$$
$$= \log|x-1| - \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\ \mathrm{d}x\ .$$

Per risolvere l'ultimo integrale, usiamo il metodo di "completamento dei quadrati", allo scopo di ottenere il denominatore nella forma $k[1+(ax+b)^2]$ (dove k, a, b sono costanti opportune da trovare).

$$x^2+x+1=\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2+\tfrac{3}{4}=\tfrac{3}{4}\left[1+\tfrac{4}{3}\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2\right]=\tfrac{3}{4}\left[1+\left(\tfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right].$$

Pertanto

$$\frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\ \mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{1}{\frac{3}{4}\left[1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]}\ \mathrm{d}x = 2\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\ \mathrm{d}x = \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c.$$

Infine

$$\int \frac{3x}{x^3-1}\ \mathrm{d}x = \log|x-1| - \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c.$$

(d) Il polinomio x^3+2x^2+x+2 ammette la radice $x=-2$; dunque è divisibile per $x+2$. Effettuando i calcoli si trova $x^3+2x^2+x+2=(x+2)(x^2+1)$.

Dunque

$$\int \frac{9x+8}{x^3+2x^2+x+2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{9x+8}{(x+2)(x^2+1)}\ \mathrm{d}x\ .$$

Ricorriamo alla decomposizione in fratti semplici.

$$\frac{9x+8}{(x+2)(x^2+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)}=\frac{(A+B)x^2+(2B+C)x+A+2C}{(x+2)(x^2+1)}.$$

Uguagliando i polinomi a numeratore della prima e dell'ultima frazione, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} A+B &= 0 \\ 2B+C &= 9 \\ A+2C &= 8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A &= -2 \\ B &= 2 \\ C &= 5 \end{cases}.$$

Pertanto:

$$\int \frac{9x+8}{x^3+2x^2+x+2}\ \mathrm{d}x = \int \left(\frac{-2}{x+2}+\frac{2x+5}{x^2+1}\right)\ \mathrm{d}x = \int \frac{-2}{x+2}\ \mathrm{d}x + \int \frac{2x}{x^2+1}\ \mathrm{d}x + \int \frac{5}{x^2+1}\ \mathrm{d}x =$$
$$= -2\log|x+2| + \log(x^2+1) + 5\arctan x + c = \log\frac{x^2+1}{(x+2)^2} + 5\arctan x + c.$$

(e) Poiché il grado del polinomio al numeratore è superiore a quello del denominatore, occorre preliminarmente procedere alla divisione dei due polinomi.

Si ottiene

$$\frac{x^5-3x^4+x+3}{x^2-1}=x^3-3x^2+x-3+\frac{2x}{x^2-1}.$$

Pertanto

$$\int \frac{x^5-3x^4+x+3}{x^2-1}\ \mathrm{d}x\ =\int (x^3-3x^2+x-3)\ \ \mathrm{d}x\ +\int \frac{2x}{x^2-1}\ \mathrm{d}x\ =\frac{x^4}{4}-x^3+\frac{x^2}{2}-3x+\log|x^2-1|+c.$$

(f) Effettuando la necessaria divisione tra il polinomio a numeratore e quello a denominatore, si ottiene

$$\frac{x^5-x+1}{x^4+x^2}=x-\frac{x^3+x-1}{x^4+x^2}$$

Dunque

$$\int \frac{x^5-x+1}{x^4+x^2}\ \mathrm{d}x\ =\int \left(x-\frac{x^3+x-1}{x^4+x^2}\right)\ \mathrm{d}x\ =\int x\ \mathrm{d}x\ -\int \frac{x^3+x-1}{x^2(x^2+1)}\ \mathrm{d}x\ .$$

Ricorriamo alla decomposizione in fratti semplici:

$$\frac{x^3+x-1}{x^2(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Procedendo come sopra, si ottiene

$$\begin{cases} A & = & 1 \\ B & = & -1 \\ C & = & 0 \\ D & = & 1 \end{cases}.$$

Dunque:

$$\int \frac{x^5-x+1}{x^4+x^2}\ \mathrm{d}x\ =\frac{x^2}{2}-\int \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2+1}\right)\ \mathrm{d}x\ =\frac{x^2}{2}-\log|x|-\frac{1}{x}-\arctan x+c.$$